Meta-Stable Rangeに於ける球面の局所平坦位相埋蔵 (Combinatorial Topology)

加藤, 十吉

数理解析研究所講究録
152巻 1972年 65-73

meta-stable range に於ける 球面の局所平坦位相埋蔵

東大・教養　加藤十吉

§1. 序

次の定理を証明する。

<u>定理</u>. 「Mをコンパクトm次元PL多様体, Wをw次元多様体とし, 連続写像 $f:(M,\partial M)\longrightarrow(W,\partial W)$ が, $f|\partial M:\partial M\longrightarrow\partial W$ が局所平坦埋蔵であるように与えられたとする。

1). $3(m+1)<2w$,

2). Mは$2w-m$-連結, そして,

3). Wは$2w-m+1$-連結

であると仮定する。このとき, 写像$f:M\longrightarrow W$は∂Mに相対的に局所平坦埋蔵にホモトープである。」

この定理は著者の論文[2]の中で証明なしに使用されている。完全性の為にこの機会に証明を与える。

この定理でMのPL性(を取り去り)及び仮定1)を$w-m\geqq 3$として

も成立するであろうがその証明を著者は知らない。

この定理から直ちに次が得られる。

系.「W を $(n-k+1)$-連結な$(n+k)$-次元多様体とし，$n<2k-3$ と仮定する。そのとき，$\pi_n(W)$ のかってな元は局所平坦埋蔵 $f: S^n \longrightarrow W$ で実現される。」

§2. 局所PL nice写像.

多面体 P からPL多様体 Q へのPL写像 $f: P \to Q$ が"nice"といわれるのは，非退化かつ一般の位置にあるときをいう。多面体 P から w 次元多様体 W への連続写像 $f: P \longrightarrow W$ が"局所PL nice"といわれるのは，各点 $x \in P$ に対して，$f(x)$ のまわりの座標関数

$$h: U \longrightarrow R^w$$

が存在して，$h \circ f \mid f^{-1}(U): f^{-1}(U) \longrightarrow R^w$

がPL niceとなるときをいう。（但し，U は $f(x)$ の W における開近傍である。）次は良く知られた事実である。

命題1.「$f: P \longrightarrow Q$ を多面体 P からPL多様体 Q への連続写像とし，P の部分多面体 R 上で $f|R$ はPL nice とする。そのとき，f はPL nice写像 $g: P \longrightarrow Q$ によりRに相対的に近似される。」

局所 PL nice 写像の性質を調べておこう。

命題2．「$f : P \longrightarrow W$ をコンパクト p 次元多面体 P から w 次元多様体 W の中への局所 PL nice 写像とする。そのとき，$f(P)$ は $f : P \to f(P)$ が PL 写像かつ W の中で局所 tame な PL 構造を有し，その二重点集合 $S_2(f) = \{x \in P \mid f^{-1}(f(x)) \neq \{x\}\}$ は P の部分多面体で，$\dim S_2(f) \leqq 2p - w$ である。」

証明．

$f : P \to W$ は局所 PL nice，そして $f(P)$ はコンパクトだから，$f(P)$ の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1,\cdots,n}$ が存在して，同相写像 $h_i : U_i \longrightarrow R^w$ が存在して，

$$h_i \circ f \,|\, f^{-1}(U_i) : f^{-1}(U_i) \longrightarrow R^w$$

が PL nice となる。$U_i \cap f(P) = V_i$ とおけば，$\bigcup_{i=1}^{n} V_i = f(P)$ で，各 i に対して，$h_i(V_i)$ は R^w の部分多面体である。ここで次を示す。

★「もし，$V_i \cap V_j \neq \emptyset$ ならば，

$$h_j \circ (h_i | V_i \cap V_j)^{-1} : h_i(V_i \cap V_j) \longrightarrow h_j(V_i \cap V_j)$$

は PL 同相である。」

なぜなら，$h_i \circ f$ と $h_j \circ f$ は PL nice 写像で，$f^{-1}(V_i \cap V_j)$ の適当な三角分割の各単体上 PL 埋蔵で，かつ

$$h_j \circ f = h_j \circ (h_i^{-1} \circ h_i) \circ f = (h_j \circ h_i^{-1}) \circ (h_i \circ f)$$

となるからである。

故に，$f(P)$ 上の PL 構造 $\{V_i, h_i \mid V_i \cdot V_i \to h_i(V_i) \subset R^w\}$ が得られ，$f: P \to f(P)$ はこの構造に関して PL，かつ，$f(P) \subset W$ は局所 tame となる。又，$f: P \to W$ の二重点集合 $S_2(f)$ は $f: P \to f(P)$ のそれと一致するので P の部分多面体となる。更に，各 PL nice 写像 $h_i \circ f \mid f^{-1}(V_i) : f^{-1}(V_i) \longrightarrow R^w$ に対して

$\dim S_2(h_i \circ f) \leqq 2p - w$ が成立するので，

$\dim S_2(f) \leqq 2p - w$ をうる。（証明了）。

§3. 局所 PL nice 近似

補題.「$f: P \to W$ をコンパクト p 次元多面体 P から w 次元多様体 W の中への連続写像とする。もし，

$3(p+1) < 2w$ ならば，f は局所 PL nice 写像により近似される。」

証明. $f(P)$ はコンパクトだから $f(P)$ の W における有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1,\cdots,n}$，及び 同相写像 $h_i: U_i \to R^w$ が存在して，単位球 $D^w \subset R^w$ に対して，

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} (h_i \circ f)^{-1}(\mathrm{Int}\, D^w)$$

とすることができる。又，$(h_i \circ f)^{-1}(D^w)$ はコンパクトだから，P のコンパクト部分多面体 E_i が存在して，

$(h_i\circ f)^{-1}(\mathrm{Int}\,D^w) \subset E_i \subset f^{-1}(U_i)$, $i=1,\cdots,n$,
となり，従って，$\{E_i\}$がPの PL 閉被覆となる。

さて，まずU_1上の PL 構造 $h_1 : U_1 \longrightarrow R^w$ を使用して，$f|E_1 : E_1 \longrightarrow U_1$ をこの構造に関して PL nice とする。即ち，命題1により，$h_1\circ f$ をE_1上 PL nice 近似を行い，連続写像 $f_1 : P \longrightarrow W$ をとって，

E_1 のコンパクト近傍の外側で $f=f_1$，

f_1 はE_1上 PL nice（i.e., $h_1\circ f_1|E_1$ が PL nice），

更に，f_1をfに十分近似して，各iに対して，

$E_i \subset f^{-1}(U_i)$ とすることができる。

今，$P_k = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ とおいて，次の命題[k]を考える。

[k]：「$f_k : P \longrightarrow W$ がfの近似として存在し，

(1) P_k の近傍の外側で $f_k = f$，

(2) $f_k|P_k$ は局所 PL nice，かつ，

(3) $f_k^{-1}(U_i) \supset E_i$，$i=1,\cdots,n$，

(4) $f_k|P_{k-1} = f_{k-1}|P_{k-1}$．」．

とくに，$P_0=\emptyset$，$f_0=f$ とすれば，上で[1]が成立するのをみた。[k]が成立するとし，[k+1]が成立するのを示せば[n]が成立し，f_nが求めるfの近似となる。

[k] ⇒ [k+1] の証明． $f_k : P_k \longrightarrow W$ は

局所 PL nice だから，$f_k(P_k)$ は W の中で局所 tame な PL 構造を有している．よって，$h_{k+1}: U_{k+1} \longrightarrow R^w$ は $f_k(P_k) \cap U_{k+1}$ へ制限されたとき，R^w の中への局所 tame（従って，局所平坦）な埋蔵である。

$\dim f_k(P_k) \cap U_{k+1} \leqq p$ であるから，仮定 $3(p+1) < 2w$ を考慮して Chernavskii [1] を使用すれば，同相写像 $h'_{k+1}: U_{k+1} \longrightarrow R^w$ を h_{k+1} と ε-イソトピックにとり，$h'_{k+1} | f_k(P_k) \cap U_{k+1}$ が PL 埋蔵となるようにとれる．即ち，U_{k+1} 上 h'_{k+1} により与えられる PL 構造に関して，

$f_k | f_k^{-1}(U_{k+1})$ は $P_k \cap f_k^{-1}(U_{k+1})$ 上 PL nice である

と仮定することができる。こゝで，f_k を P_k に相対的に E_{k+1} 上 PL nice 近似して，連続写像

$$f_{k+1}: P \longrightarrow W$$

を得て，

(1) P_{k+1} の近傍の外側で $f_{k+1} = f$，

(2) $f_{k+1} | P_{k+1}$ は局所 PL nice，かつ

(4) $f_{k+1} | P_k = f_k | P_k$

となるようにすることができる。f_{k+1} を十分 f に近似すれば，(3) $E_i \subset f_{k+1}^{-1}(U_i)$，$i=1, \cdots, n$，が成立するので証明を終る。（証明了）．

§4. 定理の証明.

自明な場合を除けば，$m \geqq 2$，従って，$w \geqq 5$，$w-m \geqq 3$ と仮定してよい。

collar 近傍の存在から，f は ∂M の collar 近傍 $\partial M \times [0,1]$ では ∂W の collar 近傍 $\partial W \times [0,1]$ の中への局所平坦埋蔵としてよい。Kirby により局所平坦は局所 PL と解釈してさしつかえないので，$f|\partial M \times [0,1]$ 上では既に局所 PL nice とみなされる。先の補題の証明から，$f: M \to W$ は ∂M に相対的に局所 PL nice 近似可能であり，始めからそう仮定して差しつかえない。従って，命題2より，

(1) $S_2(f)$ は $\mathrm{Int}\, M$ のコンパクト部分多面体で，

$$\dim S_2(f) \leqq 2m-w,$$

(2) $f(M)$ は W の局所 tame な PL 構造を有し，

$$\dim f(M) \leqq m$$

と仮定することができる。

さて，M は $2m-w$ −連結だから PL 吸い込みにより collapsible 多面体 $C \subset \mathrm{Int}\, M$ が存在して，

$$C \searrow S_2(f) \quad \text{かつ}$$

$$\dim C \leqq 2m-w+1$$

となる。f は局所 PL nice だから，$f(C)$ は $f(M)$ の部分多面体，$\dim f(C) = \dim C \leqq 2m-w+1$，かつ

$f(C)$ はWで局所 tame である.

W は $2m-w+1$ −連結 だから位相吸い込みにより, $f(C)$ はWの中の w 次元球体B の内部に入っているとしてよい。 Chernavskii [1] により $f(C)$はその PL構造に関してBの部分多面体としてよい。PL吸い込みにより, collapsible 多面体 $D \subset \mathrm{Int}\, B$ が存在し,

$$D \searrow f(C),$$

$$\dim D \leqq 2m-w+1 \quad , \text{かつ},$$

$$\dim((D-f(C)) \cap f(M))$$

$$\leqq (2m-w+2)+m-w = 3(m+1)-2w-1$$

$$< -1$$

となる。 Dは$f(M)$ と $f(C)$ でのみ交わる。

さて, $f: M \longrightarrow f(M)$ はPL写像で, Cは $f(M)$の部分多面体 $f(C)(\subset D \subset \mathrm{Int}\, B)$の上へうつされる。 従って, Cの $\mathrm{Int}\, M$ での正則近傍U, Dの $\mathrm{Int}\, B$での正則近傍V を適当にとれば,

$$f \mid \overline{M-U} : \overline{M-U} \longrightarrow \overline{W-V}$$

は局所PL埋蔵, 従って, $w-m \geqq 3$ より, 局所平坦埋蔵となっている。 U, Vは m次元, w次元球体だから cone 拡大により求める局所平坦埋蔵

$$g: M \longrightarrow W$$

をうる。 gとfがホモトープなのは明らかである。

(証明了).

参考文献.

[1] A. V. Chernavskii, *Homeomorphisms of euclidean space and topological embeddings of polyhedra in euclidean space*, Mat. Sb. 63 (1965), 581–613.

[2] M. Kato, *Classification of compact manifolds homotopy equivalent to a sphere*, (to appear).